BANCO DE EXERCÍCIOS - 24 HORAS

Martins COLÉGIO-CURSO

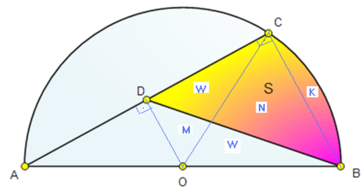
• 9º ANO ESPECIALIZADO/CURSO – ESCOLAS TÉCNICAS E MILITARES •

• FOLHA Nº 14 – GABARITO COMENTADO •

1) OBS: Dado um trapézio, quando traçamos as diagonais, o mesmo fica decomposto em 4 triângulos sendo que os triângulos que contém os lados não paralelos são equivalentes.

Percebe-se que a área da região hachurada é equivalente à área de um setor circular de 45°. Daí;

$S_{setor} = \frac{\pi 62}{8}$; $s = 4{,}5\pi$



OPÇÃO B

2) Observe que o triângulo BDF é equilátero e os triângulos BMD e BFN são congruentes, onde os ângulos FBN e DBM são iguais. É fácil observar que o ângulo MBN mede 60°.

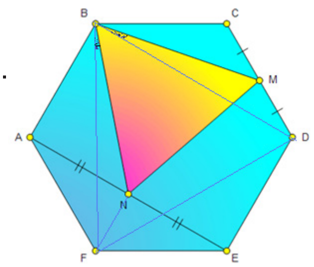
Como BM = BN e o ângulo formado por eles é de 60°, pode-se afirmar que BM = BN = MN.

Como $BN^2 = (4\sqrt{2}) + (2\sqrt{6})^2$

$BN = 2\sqrt{14}$; daí, a área do triângulo BMN $= \left(2\sqrt{14}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{5} = 14\sqrt{3}\,cm^2$

Como $BN^2 = \left(4\sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{6}\right)^2$

$BN = 2\sqrt{14}$; daí, a área do triângulo BMN $= \left(2\sqrt{14}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{5} = 14\sqrt{3}\,cm^2$



OPÇÃO D

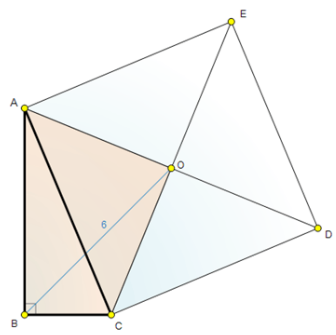
3) Observe que o quadrilátero ABCO é inscritível. Sejam a, b e c os lados do triângulo retângulo ABC.

Pelo teorema de Ptolomeu temos:

$bc\sqrt{2}/2 + ab\sqrt{2}/2 = 6b$. daí temos: $a + c = 6\sqrt{2}$.

A área de ABCO $= \frac{ac}{2} + \left(\frac{b}{2}\sqrt{2}\right)^2 . 1/2 = \frac{ac}{2} + \frac{b^2}{4}$

A área de ABCO $= \frac{1}{4}(a+c)^2 = \frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2}{4}$ 18 u.a.



OPÇÃO A

4) Unindo–se os pontos médios dos lados, é fácil observar que:

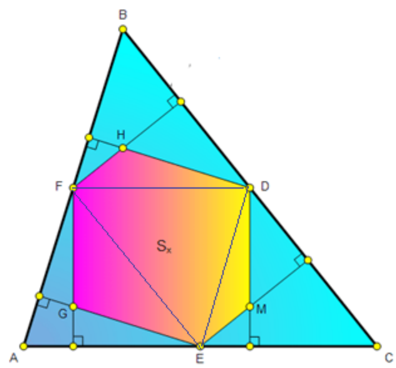
Note que a Área (BFD) = Área (AFE) = Área (CED) = Área (EFD) = 12

Os triângulos BFD e FAE são congruentes;

O triângulo EDM é congruente com o triângulo FBH;

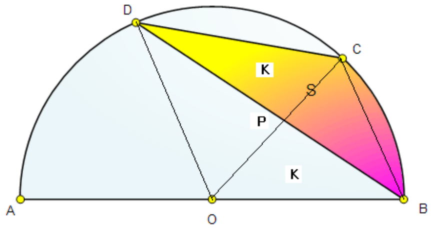
E o triângulo FGE também é congruente ao triângulo BHD.

Então Área (EGFHDM) = Área (EFD) + Área (FBD) = 24



OPÇÃO D

5) Como a área do triângulo PCD é igual a área do triângulo PBO, podemos afirmar que a área da região hachurada é igual a área do setor circular de 45°.



Daí, S = 36 π/8 = 4,5 π cm²

OPÇÃO B

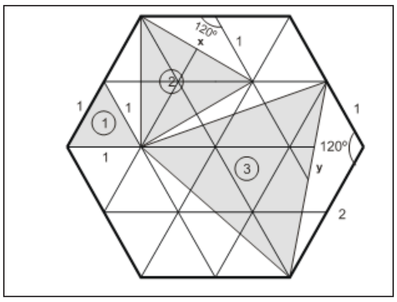
6) A área do octógono é dado pela expressão

$S = \dfrac{a^2}{48}$ ou seja:

$S = \left(3\sqrt{5}\right)^2/48 = \dfrac{45}{48} = 15/16$

OPÇÃO A

7) Utilizando o teorema dos cossenos, temos:



$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120^o \Leftrightarrow x^2 = 3$

$y^2 = 2^2 + 1^2 - 2.2.1.\cos 120^o \Leftrightarrow y^2 = 7$

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$S = \dfrac{1^2.\sqrt{3}}{4} + \dfrac{x^2.\sqrt{3}}{4} + \dfrac{y^2.\sqrt{3}}{4}$

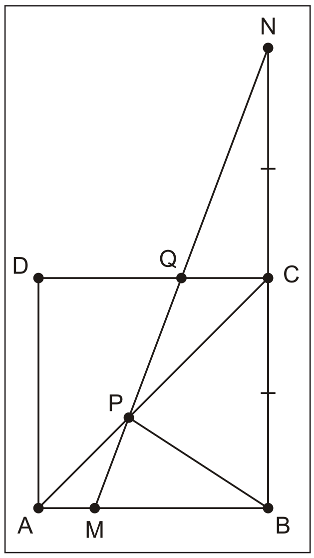
$S = \dfrac{1^2.\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3.\sqrt{3}}{4} + \dfrac{7.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{11\sqrt{3}}{4}$

$B = 24.\ \dfrac{1^2.\sqrt{3}}{4} - \dfrac{11.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{13.\sqrt{3}}{4}$

Logo, $\dfrac{B}{S} = \dfrac{\dfrac{13.\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{11.\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{13}{11}$.

OPÇÃO D

8) A área do triângulo PBC é dada por: $(PBC) = \dfrac{1}{2}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{BC}\cdot \text{sen}\,P\hat{C}B.$



Além disso, se $\overline{AM} = \dfrac{\overline{BM}}{3}$, temos: $\overline{BM} + \overline{AM} = 3\cdot\overline{AM} + \overline{AM} = 4\cdot\overline{AM} = k \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \overline{AM} = \dfrac{k}{4} \\ \overline{BM} = \dfrac{3k}{4} \end{array} \right.$.

Como AC é diagonal do quadrado ABCD, segue que $P\hat{C}B = 45°$ e $\overline{AC} = k\sqrt{2}$.

Os triângulos NQC e NMB são semelhantes por AAA. Desse modo,

$\dfrac{\overline{QC}}{\overline{BM}} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{QC}}{\dfrac{3k}{4}} = \dfrac{k}{2k} \Leftrightarrow \overline{QC} = \dfrac{3k}{8}.$

Os triângulos APM e PQC são semelhantes por AAA. Logo,

$\dfrac{\overline{PC}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{PC}}{\overline{AP}} = \dfrac{\dfrac{3k}{8}}{\dfrac{k}{4}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \dfrac{2}{3}\cdot\overline{PC}.$ Daí,

$\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC} = \dfrac{2}{3}\cdot\overline{PC} + \overline{PC} = k\sqrt{2} \Rightarrow \overline{PC} = \dfrac{3k\sqrt{2}}{5}.$ Por conseguinte,

$(PBC) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3k\sqrt{2}}{5}\cdot k\cdot \text{sen}\,45° = \dfrac{3k^2}{10}$ e, assim, a porcentagem pedida é:

$\dfrac{(PBC)}{(ABCD)} = \dfrac{\dfrac{3k^2}{10}}{k^2}\cdot 100\% = 30\%.$

OPÇÃO D

9) Seja S a área do triângulo BOP.

Como $\overline{PC} = 4 \cdot \overline{BP}$, segue que (OPC) = 4 · (BOP) e (APC) = 4 · (BAP). Além disso, como ABC é isósceles de base AB, e M é ponto médio de AB, temos que (BOP) = (AOQ), (COP) = (COQ) e (BOM) = (AOM).

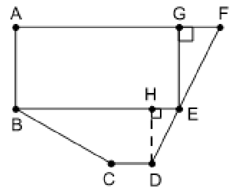
Portanto,

$$\begin{aligned}(APC) = 4 \cdot (BAP) &\Leftrightarrow (AOQ) + 2 \cdot (COP) = 4 \cdot [2 \cdot (BOM) + (BOP)] \\ &\Leftrightarrow S + 2 \cdot 4S = 4 \cdot (2 \cdot 5 + S) \\ &\Leftrightarrow 9S = 40 + 4S \\ &\Leftrightarrow S = 8\,cm^2.\end{aligned}$$

OPÇÃO C

10) Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de D sobre BE.

Sabendo que $\overline{AF} = 15\,cm$, $\overline{AG} = 12\,cm$ e $\overline{AB} = \overline{EG} = 6\,cm$, pelo Teorema de Pitágoras, vem



$$\begin{aligned}\overline{EF}^2 = \overline{GF}^2 + \overline{EG}^2 &\Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 3^2 + 6^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 3^2 \cdot 5 \\ &\Rightarrow \overline{EF} = 3\sqrt{5}\,cm.\end{aligned}$$

Logo, dado que $\overline{DF} = 5\sqrt{5}\,cm$, obtemos $\overline{ED} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\,cm.$

Assim, como os triângulos FGE e EHD são semelhantes, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{DH}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} &\Leftrightarrow \frac{\overline{DH}}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow \overline{DH} = 4\,cm.\end{aligned}$$

Desse modo, a área pedida, em cm², é dada por

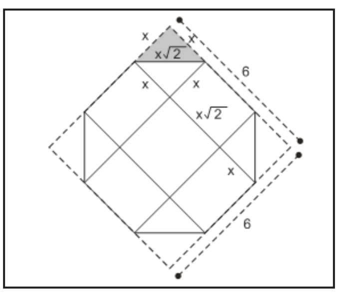
$$\begin{aligned}(ABEF) + (BCDE) &= \frac{(15+12)}{2} \cdot 6 + \frac{(12+3)}{2} \cdot 4 \\ &= 81 + 30 \\ &= 111.\end{aligned}$$

Por conseguinte, se x é a área real da APP, então

$$\begin{aligned}\frac{111 \cdot 10^{-10}}{x} = \left(\frac{1}{200000}\right)^2 &\Leftrightarrow x = 111 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^{10} \\ &\Leftrightarrow x = 444\,km^2.\end{aligned}$$

OPÇÃO E

11) Calculando o valor de x, temos:



$x + x\sqrt{2} + x = 6$

$x(2 + \sqrt{2}) = 6$

$x = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$x = 3 \cdot (2 - \sqrt{2})$

Portanto, a área do octógono será calculada por :

A = 6² (área do quadrado) − $4 \cdot \frac{x.x}{2}$ (área dos triângulos retângulos de catetos x)

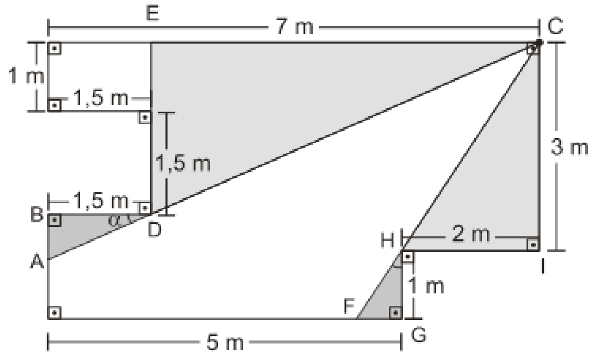
$A = 36 - 2x^2$

$A = 36 - 2 \cdot (3 \cdot (2 - \sqrt{2}))^2$

$A = 36 - 18(4 - 4\sqrt{2} + 2)$

$A = 72 \cdot (\sqrt{2} - 1)$

OPÇÃO C

12) 

$\Delta ABD \sim \Delta DEC : \frac{AB}{2,5} = \frac{1,5}{5,5} \Rightarrow AB = 0,682$ e $A_{\Delta ABD} = \frac{0,682 \cdot 1,5}{2} = 0,51\ m^2$

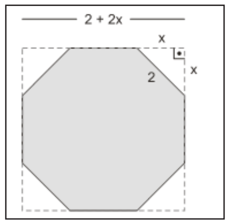
$\Delta FGH \sim \Delta HIC : \frac{FG}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow FG = 0,667$ e $A_{\Delta FGH} = \frac{0,667 \cdot 1}{2} = 0,33\ m^2$

Área da loja: $A = 4 \cdot 7 - 1,5^2 - 2 \cdot 1 = 23,75\ m^2$

Área não coberta pela câmera em porcentagem: $\frac{23,75 - 0,51 - 0,33}{23,75} = 96,46\%$

OPÇÃO D

13) Cálculo da área do octógono regular:



$x^2 + x^2 = 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

Portanto, a área A_1 do octógono regular será dada por:

$$A_1 = (2+2x)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$A_1 = \left(2+2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 8\sqrt{2} + 8$$

Cálculo da área A_2 dos oito semicírculos:

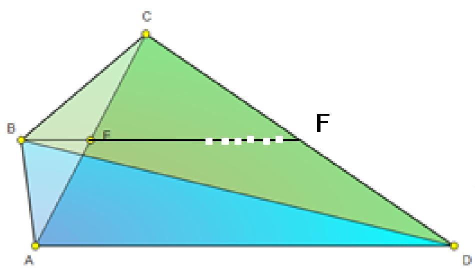
$$A^2 = 8 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4\pi$$

Logo, a área da figura será dada por:

$A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = 8\sqrt{2} + 8 + 4\pi$.

OPÇÃO A

14) Prolongue BE até CD em F.



Prolongue BE até CD em F.

E fácil ver que S (AEC) = S (BAE) = 0,5 pois F é o ponto médio de CD – > S (BCF) = S (BDF) = 2 S (CEF) = 2-0,5 = 1,5

Como CEF é semelhante ao CAD, assim, as proporções das áreas é de $2^2 = 4$ – > S (CAD) = 6

S (ABCD) = S (ABC) + S (CAD) = 6 + 1 = 7

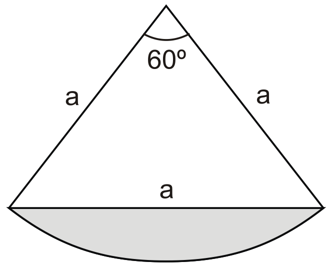
OPÇÃO C

15) $3.200.000 = N \cdot 105 \cdot 6 \cdot 4 \Leftrightarrow N = \frac{3.200.000}{105 \cdot 6 \cdot 4} \Leftrightarrow N = 112,0448179$

Ou seja, N é aproximadamente 112.

OPÇÃO C

16) Importante observar que a figura não mostra o círculo circunscrito ao pentágono regular, mas, sim, cinco segmentos circulares, como o da figura abaixo.



Tirando a área do triângulo equilátero da área do setor circular, encontra-se a área do segmento circular. Multiplicando este resultado por cinco, tem-se a área pedida.

$$A_T = 5.\left(\frac{\pi.a^2.60°}{360} - \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{5.a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

OPÇÃO A

17) A área do quadrado ABCD é igual a $12^2 = 144$ u.a.
A figura escura é constituída por 16 losangos de diagonais $3\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$. Logo, sua área é dada por $16 \cdot \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 48$ u.a.
Portanto, o resultado é $\frac{48}{144-48} = \frac{1}{2}$.

OPÇÃO A

18) A razão pedida é dada por $\dfrac{\pi.\left(\dfrac{\overline{DB}}{2}\right)^2}{\dfrac{\pi.\overline{OC}^2}{2}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\overline{DB}^2}{\overline{OC}^2}$.

Sabemos que $\overline{AC} = 4\cdot\overline{BC}$ e $\overline{AC} = 2\cdot\overline{OC}$. Logo, $\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OC}$. Além disso,

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AC} - \overline{BC}\\ &= 2\cdot\overline{OC} - \frac{1}{2}\cdot\overline{OC}\\ &= \frac{3}{2}\cdot\overline{OC}.\end{aligned}$$

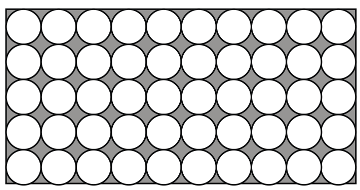
Como AC é diâmetro da semicircunferência de centro em O, segue que o triângulo ADC é retângulo em D. Consequentemente, pelas relações métricas no triângulo retângulo, vem

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{AB}\cdot\overline{BC}\\ &= \frac{3}{2}\cdot\overline{OC}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{OC}\\ &= \frac{3}{4}\cdot\overline{OC}^2.\end{aligned}$$

Portanto, a razão pedida é igual a $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overline{DB}^2}{\overline{OC}^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\overline{OC}^2}{\overline{OC}^2} = \dfrac{3}{8}$.

OPÇÃO A

19) Total de biscoitos retirados no comprimento: 40/4 =10



Total de biscoitos retirados na largura: 20/4 =5

Total de biscoitos retirados: 5/10 = 50

Área restante em cm²: A = 40 · 20 – 50 · 3 · 22 = 200 cm²

Com 200 cm² de massa será possível formar um retângulo de dimensões 8 por 25 cm, já que 8 . 25 = 200 cm².

OPÇÃO B

20) $A = 50.1000.(14.6,5) = 4550000\ cm^2 = 455\ m^2$.

OPÇÃO D

21) Calculando as áreas dos ambientes, obtemos

$S_I = 8 \cdot 5 = 40\ m^2$,

$S_{II} = (14 - 8) \cdot 5 = 30\ m^2$,

$S_{III} = (14 - 8) \cdot (9 - 5) = 24\ m^2$

e

$S_{IV} = \frac{(14 - 8) + 4}{2} \cdot 7 = 35\ m^2$.

Desse modo, como Jorge quer gastar o mínimo com gás, ele deverá instalar duas unidades do tipo A (ambientes II e III) e duas unidades do tipo B (ambientes I e IV).

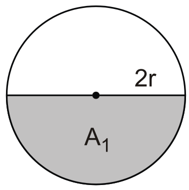
OPÇÃO C

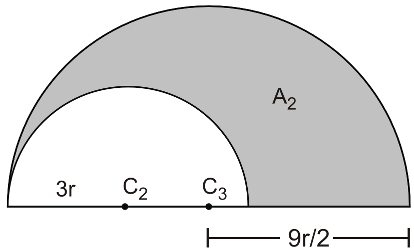
22) A razão da P.G. formada pelos raios será dada por $\frac{3r}{2r} = \frac{3}{2}$, portanto o raio da terceira circunferência será $\frac{9r}{2}$.

Calculando agora as áreas assinaladas A_1 e A_2: $A = A_1 + A_2$

$$A = \frac{\pi \cdot (2r)^2}{2} + \left(\frac{\pi \cdot \left(\frac{9r}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi \cdot (3r)^2}{2} \right)$$

$$A = 2\pi \cdot r^2 + \frac{45\pi}{8} = \frac{61\pi}{8}$$





OPÇÃO C

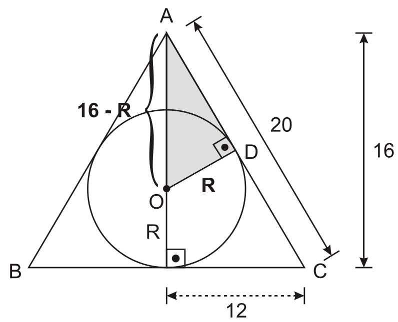
23) $AC^2 = 16^2 + 12^2 \Leftrightarrow AC = 20$

$\Delta AOD \sim \Delta ACM \Leftrightarrow \frac{R}{12} = \frac{16 - R}{20} \Leftrightarrow R = 6$

Área que será pintada.

$A = A = 450.\pi R^2 = 450.3.6^2 = 48600\ cm^2$

Número de potes $= \frac{48600}{5400} = 9$



OPÇÃO A

24) Sejam r_I, r_{II} e r_{III} os raios das tampas.

Como os círculos são tangentes, segue que o raio de cada um dos três tipos de tampa é dado por $\frac{2}{2 \cdot n} = \frac{1}{n}$, em que n é o número de círculos tangentes a um dos lados da chapa.

Desse modo, as sobras de cada chapa são respectivamente iguais a

$$4 - \pi \cdot r_I^2 = 4 - \pi \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 4 - \pi,$$

$$4 - 4 \cdot \pi \cdot r_{II}^2 = 4 - 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 - \pi$$

e

$$4 - 16 \cdot \pi \cdot r_{III}^2 = 4 - 16 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4 - \pi.$$

Portanto, as três entidades recebem iguais quantidades de material.

OPÇÃO E

25) Área do lote: 20.(12 + 18) = 600 m²

Área construída: $\dfrac{(x+12).20}{2} = 10x + 120$

De acordo com o enunciado, temos:

$$\frac{40}{100}\cdot 600 \le 10x + 120 \le \frac{60}{100}\cdot 600 \Rightarrow 240 \le 10x + 120 \le 360 \Rightarrow 120 \le 10x \le 240 \Rightarrow 12 \le x \le 24$$

Portanto, $x \in [12,24]$.

OPÇÃO E

26) Admitindo x, y e z os raios das circunferências de centros A,B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: x = 3/2, y = 11/2 e z = 5/2.

Calculando, agora, a soma das áreas de todos os círculos, temos:

$$A = \pi\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \pi\cdot\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{195\pi}{4}\text{km}^2.$$

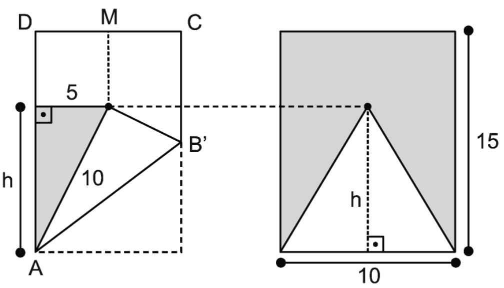
OPÇÃO D

27) Sabendo que o ângulo interno de um octógono regular mede 135°, segue-se que os quatro triângulos, resultantes da decomposição do octógono, são retângulos isósceles de catetos iguais a $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$ Logo, como a área do quadrado destacado no centro do octógono é S = a², tem-se que o resultado pedido é

$$\begin{aligned} 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + S &= a^2 + 2\sqrt{2}a^2 + S \\ &= 2S\sqrt{2} + 2S \\ &= 2S(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

OPÇÃO C

28)

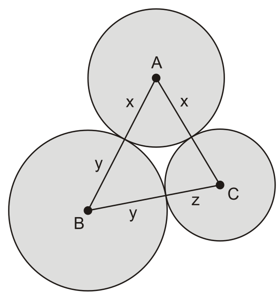


$$h^2 + 5^2 = 10^2$$

$$h^2 = 100 - 25$$

$$h^2 = 75$$

$$h = 5\sqrt{3}\text{cm}$$



Portanto, a área da bandeirinha será: $A = 10.15 - \dfrac{10.5\sqrt{3}}{2} = 150 - 25\sqrt{3} = 25(6 - \sqrt{3})\text{cm}^2$

OPÇÃO B